Министерство общего и профессионального образования
Российской федерации

Архангельский государственный технический университет

Институт информационных технологий

Арифметические осиовы ЭВМ

Методические указания к выполнению
расчетно-графической работы

Архангельск 2001

Содержание

В методических указаниях приведены краткие сведения о системах счисления, о переводе чисел из одной системы счисления в другую. Для закрепления знаний по переводу чисел в другие системы счисления приведены подробные примеры и даны задания для упражнений. Рассмотрены формы представления чисел и размещение их в разрядной сетке.

Особое внимание в методических указаниях обращено на кодирование чисел в ЭВМ и на арифметические операции над двоичными и десятичными числами.

Методические указания содержат задания с элементами научных исследований, целью которых является привитие студентам навыков решения задач исследовательского характера. Они способствуют более глубокому пониманию арифметических основ ЭВМ.

I. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления - способ наименования и представления чисел с помощью символов, имеющих определенные количественные значения. Системы счисления могут быть ***непозиционные и позиционные.***

В **непозиционной системе счисления** количественное значение символа не зависит от его позиции в ряду символов, изображающих это число. Примером такой системы является римская система счисления (вернее сказать, римская система является частично непозиционной, т. к. итоговое значение числа зависит от положения того или иного символа в числе, например: XI и IX).

Позиционные системы счисления-системы, в которых количественное значение символа зависит от его позиции в ряду символов, изображающих это число. Данные системы удобны тем, что в них для записи числа требуется небольшое количество символов. Например: арабская система счисления.

Основание системы счисления это количество различных символов, используемых для изображения числа. Обозначать будем P или Q.

В общем случае любое число, представленное в позиционной системе счисления, можно записать в виде:

$$x_{(P)}=a_{m-1}\cdot P^{m-1}+a_{m-2}\cdot P^{m-2}+\ldots+a_1\cdot P^1+a_0\cdot P^0+a_{-1}\cdot P^{-1}+\ldots+a_{-s}\cdot P^{-s}$$

где P-основание системы счисления;

a_i -цифры числа, записанного в P-й системе счисления;

m-количество разрядов целого числа;

s-количество зарядов дробной части;

Пример 1.1:

$54673,73_{10}=5\times10^4+4\times10^3+6\times10^2+7\times10^1+3\times10^0+7\times10^{-1}+3\times10^{-2}$

В современных ЭВМ для кодирования чисел используются позиционные системы счисления (десятичная, восьмеричная, двоичная, шестнадцатеричная, а также двоично-десятичная).

В десятичной системе счисления основанием системы является число 10. Для записи любого числа в этой системе используются цифры от 0 до 9.

Восьмеричная система счисления применяется в ЭВМ в основном для составления программ, т. к. позволяет производить более короткую и удобную запись двоичных чисел. Основанием системы счисления является цифра 8, записываемая цифрами 1 и 0. Для записи любого числа в этой системе используются цифры от 0 до 7. При указании, системы счисления в этом случае можно использовать символ **о**: **67о**.

Наиболее часто в ЭВМ используется **двоичная система** счисления, в которой любое число записывается только цифрами 0 и 1. Основанием системы счисления является цифра 2, записываемая как 10.

В шестнадцатеричной системе счисления используются цифры от 0 до 15. Первые десять цифр этой системы изображаются с помощью цифр от 0 до 9, а для остальных цифр, больших девяти, вводятся специальные обозначения в виде шести букв латинского алфавита А, *B, C, D, E,, F:*

10-A, 11-B, 12-C, 13-D, 14-E, 15-F. Основание этой системы счисления -число 16,-изображается также двумя цифрами 1и 0.

При указании, системы счисления в этом случае можно использовать символ **h**: **15Ah**.

В большинстве ЭВМ преобразование десятичных чисел в двоичные осуществляется с помощью двоично-десятичного изображения чисел.

При двоично-десятичном изображении каждая из цифр десятичного числа кодируется четырьмя двоичными разрядами. В табл. 1 приведены числа от 0 до 16 в различных системах счисления.

Выполнение всех действий в ЭВМ производится в двоичной системе счисления. Объясняется это тем, что машины в качестве базовых используют в основном двухпозиционные элементы. Двоичная система позволяет достаточно просто реализовать арифметические и логические действия, применить аппарат алгебры логики для анализа и синтеза логических систем ЭВМ.

Таблица 1.

Системы счисления				
десятичная $cc_{(10)}$	двоичная $cc_{(2)}$	восьмеричная $cc_{(8)}$	шестнадцатеричная $cc_{(16)}$	двоично-десятичное изображенне $cc_{(2\text{-}10)}$
0	0	0	0	0000
1	1	1	1	0001
2	10	2	2	0010
3	11	3	3	0011
4	100	4	4	0100
5	101	5	5	0101
6	110	6	6	0110
7	111	7	7	0111
8	1000	10	8	1000
9	1001	11	9	1001
10	1010	12	a	0001 0000
11	1001	13	b	0001 0001
12	1100	14	c	0001 0010
13	1101	15	d	0001 0011
14	1110	16	e	0001 0100
15	1111	17	f	0001 0101
16	10000	20	10	0001 0110

Двоичная система счисления, как видно из табл. 1, является самой громоздкой при изображении одних и тех же чисел, что делает ее весьма неудобной для восприятия. Поэтому все исходные данные и результаты представляются в десятичной системе. Перед вводом исходных данных в ЭВМ десятичные числа в процессе перфорации переводятся в двоично-десятичные. Перевод двоично-десятичных чисел в двоичные выполняется ЭВМ по специальной программе. Перед выводом из ЭВМ двоичные числа переводятся в десятичные. Этот перевод осуществляется автоматически программным путем.

Для представления служебной информации (команды, адреса и т. д.) используется, как правило, восьмеричная или шестнадцатеричная системы счисления. Выбор этих систем счисления объясняется тем, что основания 8 и 16 есть целые степени числа два: $8=2^3$ и $16=2^4$, благодаря чему перевод чисел этих систем счисления в двоичную весьма прост: достаточно заменить каждую восьмеричную цифру двоичной триадой, а при переводе шестнадцатеричного числа - двоичной тетрадой.

2. ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДРУГУЮ

2.1 Перевод чисел из системы счисления с основанием *P* в систему счисления с основанием *Q* по правилам *p*-ичной системы счисления

Данный вариант перевода осуществляется отдельно для целой части числа и отдельно для дробной.

2.1.1 Перевод целых чисел

Для перевода целого числа из р-й системы счисления в систему счисления с основанием q надо переводимое число последовательно делить на основание q-й. системы счисления, в которую это число переводится, до тех пор, пока не будет получено частное, равное нулю. Число в новой системе счисления запишется в виде остатков от деления в обратном порядке.

Пример 2.1. Переведем число 976 из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления ($976_{10} \rightarrow x_2$)

976	2									
976	488	2								
0	488	244	2							
	0	244	122	2						
		0	122	61	2					
			0	60	30	2				
				1	30	15	2			
					0	14	7	2		
						1	6	3	2	
							1	2	1	2
								1	0	0
									1	

$x_2 = 1111010000_2$

Пример 2.2.

Переведем число ($342_{10} \rightarrow x_8$):

```
 342 | 8
 336   42 | 8
 ---  ---  ----
  6    40   5 | 8
      ---  ---
        2   0   0
           ---
            5
```

$342_{10}=526_8$

Пример 2.3.

Переведем число $859_{10} \rightarrow x_{16}$:

```
 859 | 16
 848   53 | 16
 ---  ---  ----
 11    48   3 | 16
      ---  ----
        5   0   0
           ----
            3
```

859_{10}=35Bh

2.2. Перевод правпльных дробей

Для перевода правильных дробей в систему счисления с основанием q умножают исходную дробь (а дальше только дробные части произведения, выделяя целые части) последовательно на основание системы счисления q. Полученные в результате умножения целые части произведения являются соответствующими разрядами дробного числа в системе счисления с основанием q.

Вычисления можно закончить в случае:

1. Дробь равна 0
2. Определение предела
3. Достижение заданной точности

Пример 2.4. Переведем число $0{,}27_{(10)} \rightarrow x_{(16)}$ с точностью 4 знака после запятой:

0,27⁄16=4,32=4+0,32 →4

0,32⁄16=5,12=5+0,12 →5

0,12⁄16=1,92=1+0,92 →1

0,92⁄16=14,72=14+0,72 →14

Точность достигнута, поэтому $0{,}27_{(10)} \approx 0{,}451E_{(16)}$

Правильную дробь, представленную в десятичной системе счисления можно перевести в двоичную систему счисления, записывая преобразования в строку.

Пример 2.5. Переведем десятичное число 2/5 в двоичное число с точностью до половины шестого двоичного разряда.

Решение записываем в строку. Последовательно умножаем дробную часть на основание двоичной системы счисления. При получении промежуточного произведения больше единицы, под ним пишем его дробную часть, которую умножаем на 2, а единицу заносим в запись двоичного числа. Умножения продолжаем до получения заданной точности.

В данном примере для получения заданной точности до половины шестого разряда необходимо определить 7-й разряд и произвести округление по этому разряду (с добавлением в него 1).

$$\frac{2}{5}\times 2\ \frac{4}{5}\times 2\ \frac{8}{5}\qquad \frac{6}{5}\ \frac{2}{5}\times 2\ \frac{4}{5}\times 2\ \frac{8}{5}\qquad \frac{6}{5}$$

$$\frac{3}{5}\times 2\ \frac{1}{5}\times 2 \qquad \frac{3}{5}\times 2\ \frac{1}{5}$$ дробная часть произведения

0 0 1 1 0 0 1 1 - запись двоичного числа

$$\begin{array}{r|l} 0{,}011001 & 1 \\ & 1 \\ \hline 0{,}011010 & 0 \end{array}$$

$$\frac{2}{5_{10}} \Rightarrow 0{,}011010_2$$

2.3. Перевод неправпльных дробей

Перевод неправильных дробей в систему счисления с основанием q выполняется отдельно для целой и дробной частей числа по вышеизложенным правилам с последующим соединением этих частей в одну неправильную дробь, представленную уже в новой системе счисления.

Пример 2.6. Переведем число $176{,}325_{(10)} \to x_{(8)}$:

$$\begin{array}{r|l} 176 & 8 \\ \hline 176 & 22 \;|\; 8 \\ \hline 0 & 16 \quad 2 \\ & 6 \quad 0 \\ & \quad\;\; 2 \end{array}$$

$0{,}325\times 8=2{,}6=2+0{,}6\to 2$

$0{,}6\times 8=4{,}8=4+0{,}8\to 4$

$0{,}8\times 8=6{,}4=6+0{,}4\to 6$

$0{,}4\times 8=3{,}2=3+0{,}2\to 3$

$$176{,}325_{10}=260{,}2463_8$$

Перевод чисел из восьмеричной системы счисления в двоичную осуществляется заменой каждой восьмеричной цифры ее двоичным эквивалентом — тремя двоичными цифрами.

Пример 2.7. Переведем число $432{,}107_{(8)} \rightarrow X_{(2)}$:

4	3	2,	1	0	7	(8)
100	011	010,	001	000	111	(2)

Перевод чисел из двоичной системы счисления в восьмеричную осуществляется заменой каждой триады одноразрядным восьмеричным числом.

Пример 2.8.

110	001	101,	101	100	(2)
6	1	5,	5	4	(8)

Для перевода неправильной дроби из $сс_{16}$ в $сс_2$ каждую шестнадцатеричную цифру заменяют четырьмя двоичными цифрами

Пример 2.9.

3	5	B,	4	5	1	e	(16)
0011	0101	1011,	0100	0101	0001	1110	(2)

2.2 Перевод чисел из системы счисления с основанием *P* в систему счисления с основанием *Q* по правилам *q*-ичной системы счисления

Для этого необходимо исходное число в системе счисления с основанием P представить в развернутом виде с основанием P, все числа и вычисления необходимо представить в системе счисления с основанием Q.

Пример 2.10. Перевести число $111101{,}11_2$ в десятичную систему счисления.

$$11101{,}11_2=(1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0+1\times2^{-1}+1\times2^{-2})_{10}=29\frac{3}{4}$$

Пример 2.10. Перевести число $389{,}17_{10}$ в восьмеричную систему счисления.

$$389{,}17_{10}=(3\times12^2+10\times12^1+11\times12^0+1\times12^{-1}+7\times12^{-2})_8=$$

$$=454_8+120_8+11_8+\left(\frac{1}{12}\right)_8+\left(\frac{7}{144}\right)_8=(605\frac{21}{144})_8,$$

где $10_8=8_{10}$, $12_8=10_{10}$, $11_8=9_{10}$.

Примеры по переводу чисел из одной системы счисления в другую

1. Преобразовать десятичные числа в двоичные и произвести

проверку правильности выполнения перевода обратным преобразованием:

а) $(52)_{10}$, в) $(298)_{10}$, д) $(321)_{10}$, ж) $(65)_{10}$, и) $(64)_{10}$,

б) $(23)_{10}$, г) $(37)_{10}$, е) $(17)_{10}$, з) $(46)_{10}$, к) $(71)_{10}$

2. Преобразовать, десятичные числа в двоичные с точностью до половины шестого двоичного разряда:

а) $(0{,}23)_{10}$, г) $(4/9)_{10}$, ж) $(0{,}71)_{10}$ к) $(5/7)_{10}$

б) $(0{,}99)_{10}$, д) $(7/17)_{10}$, з) $(1/3)_{10}$ л) $(9/12)_{10}$

в) $(0{,}32)_{10}$, е) $(0{,}79)_{10}$ и) $(0{,}39)_{10}$ м) $(0{,}33)_{10}$

3.Преобразовать десятичные числа в двоичные. Преобразование выполнить с точностью до половины пятого двоичного разряда. Проверить полученный результат обратным преобразованием.

а) $\left(2\frac{2}{4}\right)_{10}$ в) $(3{,}17)_{10}$ д) $\left(5\frac{9}{31}\right)_{10}$ ж) $\left(129\frac{3}{5}\right)_{10}$ и) $\left(8\frac{5}{7}\right)_{10}$

б) $\left(8\frac{1}{19}\right)_{10}$ г) $\left(3\frac{2}{7}\right)_{10}$ е) $(2{,}37)_{10}$ з) $\left(15\frac{6}{9}\right)_{10}$ к) $(7{,}21)_{10}$

4. Преобразовать десятичные числа в восьмеричные: для дробных частей закончить преобразование на втором восьмеричном разряде.

а) $(15{,}19)_{10}$; в) $(42{,}24)_{10}$; д) $(6{,}98)_{10}$; ж) $(19{,}71)_{10}$, и) $(7{,}45)_{10}$

б) $(75{,}31)_{10}$; г) $(13{,}01)_{10}$; е) $(17{,}91)_{10}$, з) $(25{,}17)_{10}$, к) $\left(15\frac{6}{7}\right)_{10}$

5. Преобразовать десятичные числа в восьмеричные с точностью до половины третьего разряда и затем восьмеричные числа преобразовать в двоичные числа:

а) $(19.15)_{10}$; г) $(14{,}04)_{10}$; ж) $\left(12\frac{3}{5}\right)_{10}$

б) $(15{,}19)_{10}$; д) $(7{,}28)_{10}$; з) $\left(17\frac{1}{7}\right)_{10}$

в) $(24{,}24)_{10}$; е) $\left(14\frac{3}{7}\right)_{10}$ и) $\left(71\frac{5}{6}\right)_{10}$

6. Преобразовать десятичные числа в двоично-десятичные:

а) $(27)_{10}$	г) $(85)_{10}$,	ж) $(21{,}14)_{10}$,
б) $(71)_{10}$	д)$(58)_{10}$,	з) $(12{,}93)_{10}$,
в) $(17)_{10}$	е) $(41.12)_{10}$,	и) $(93{,}12)_{10}$.

7. Преобразовать двоично-десятичные числа в десятичные:

а) (111010,00100110);	д) (00010001,00010001),
б) (01010,111);	е) (00100011,10000111),
в) (1001,0001);	ж) (01010100,01110010),
г) (0011000,00110100);	з) (00110111,01000110).

8. Преобразовать двоичные числа в десятичные:

а) 111010,01;	г) 11000,011;	ж) 10100,0111;
б) 1010,11;	д) 10001,11;	з) 10111,01.
в) 10101,101;	е) 100011,1;	

9. Преобразовать восьмеричные числа в десятичные:

а) 1345,01;	г) 7770,07;	ж) 1340,5;
б) 1567,22;	д) 10651,6;	з) 25611,1.
в) 351,13;	е) 654,3;	

3. ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЕЛ И РАЗМЕЩЕНИЕ ИХ В РАЗРЯДНОЙ СЕТКЕ ЭВМ

Совокупность двоичных разрядов, предназначенных для хранения и обработки чисел, представляет разрядную сетку машин. Разрядная сетка машины определяет форматы чисел, которыми можно оперировать при обработке информации. В машине не может быть представлено число, содержащее большее количество двоичных разрядов, чем их имеется в разрядной сетке машины. Это накладывает ограничение на возможную точность расчетов: чем больше разрядная сетка. тем более высокая точность вычисления может быть обеспечена машиной.

В ЭВМ используются две формы представления чисел: **естественная** - с фиксированной запятой и **нормальная**, или полулогарифмическая, с плавающей запятой. При представлении чисел с фиксированной запятой положение запятой фиксируется постоянно за определенным разрядом числа, отделяя его целую часть от дробной. Если запятая фиксируется перед старшим разрядом, то в машине числа представляются как правильные дроби; если после младшего то как целые числа.

Все числа с фиксированной запятой перед их обработкой подвергают масштабированию, чтобы избежать возможного переполнения разрядной сетки во время выполнения некоторых операций.

Переполнение-это случай вычислительного процесса, когда результат вычисления по модулю больше единицы. Масштабирование является трудоемкой операцией, и его правильность зависит в большинстве случаев от опытности программистов.

В большинстве ЭВМ запятая фиксируется перед старшим разрядом, после знакового. Такая фиксация облегчает подбор коэффициентов масштабирования, при которых все вводимые числа и результаты вычислений должны быть меньше единицы. **В знаковом разряде запсывается едпнпца, еслп чпсло отрпцательное, п нуль, - еслп положптельное.**

На рис. 3.1 приведена разрядная сетка машины с запятой, фиксированной перед старшим разрядом

Рис. 3.1. Разрядная сетка машины с запятой, фиксированной перед старшим разрядом

На рис. 3.2 показана схема записи двоичного числа

$$N_{(2)}=-0,101011001111001$$

в разрядной сетке машины с фиксированной запятой.

1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1

Рис. 3.2 Схема размещения двоичного числа

При представлении чисел в форме с плавающей запятой любое число представляется в виде двух сомножителей:

$$N = \pm M \cdot P^{\pm r},$$

где M-мантисса, представляющая собой правильную дробь ($|M| < 1$);

r - порядок числа, выраженный целым числом;

P - основание системы счисления.

Порядок указывает положение запятой в числе. При разных порядках положение запятой будет различным (по этой причине подобная форма представления чисел получила название плавающей запятой).

Например, если условно отвести под мантиссу 11 разрядов (с учетом знака) и под порядок 5, то распределение разрядной сетки будет таким, как показано на рис. 3.3.

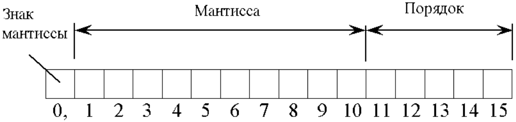

Рис. 3.3. Разрядная сетка машины с плавающей запятой

На рис. 3.4 приведена схема размещения двоичного числа $N_{(2)}=-110{,}1100101$ в разрядной сетке машины. В нормальной форме это число имеет вид

$$N_{(2)}=-0{,}1101100101\cdot 10^{+11}.$$

$$(2_{10})^3=(10_2)^{11}$$

1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1

Рис. 3.4 Схема размещения двоичного числа $N_{(2)}=-110{,}1100101$

В знаковый разряд порядка записывается нуль, если порядок положительный, и единица, - если отрицательный.

Различают нормализованные и ненормализованные числа. Число, у которого абсолютная величина мантиссы удовлетворяет условию

$$1>|M|\geq\frac{1}{P},$$

называют **нормализованным.**

В двоичной системе это условие выражается как $1>|M|\geq 0{,}1$, где $0{,}1_{(2)}=1/2_{(10)}$, т. е. число называется нормализованным, если мантисса меньше единицы и первая значащая цифра следует после запятой. Если же после запятой следует нуль, то число называется ненормализованным.

Представление чисел в нормализованном виде позволяет иметь в разрядной сетке большее число значащих цифр и, следовательно, повышает точность вычислений. Поэтому в разрядной сетке машин хранятся нормализованные числа с плавающей запятой. Если в процессе вычислений получаются ненормализованные числа, то они автоматически нормализуются самой машиной. Нормализация чисел осуществляется путем сдвига мантиссы с соответствующим изменением порядка.

Допустим, если *n* старших разрядов мантиссы равны нулю, то нормализация состоит в сдвиге мантиссы на *n* разрядов влево и уменьшении порядка на *n* единицу. При этом в младшие *n* разрядов мантиссы записываются нули и величина числа при этом не меняется. Например, если дано двоичное число в нормальной форме, но ненормализованное ($N=0{,}00101 \times 10^{-110}$), то для его нормализации необходимо мантиссу сдвинуть влево на два разряда, а порядок уменьшить на две единицы. В нормализованном виде число примет вид:

$N=0{,}101 \times 10^{-1000}$.

4. КОДИРОВАНИЕ ЧИСЕЛ В ЭВМ

Кодирование чисел используется для упрощения конструкции АЛУ. Применение специальных кодов чисел позволяет все основные вычислительные операции свести, как правило, к операции сложения или к операциям сложения и сдвигов. Операция сложения положительных чисел выполняется в ЭВМ в прямом коде. Этот же код используется для хранения положительных и отрицательных чисел в памяти машины. Отрицательные числа представляются в ЭВМ двумя кодами -обратным и дополнительным.

Прямой код любого двоичного числа $x=0, x_1,x_2, \ldots, x_n$ представленного правильной двоичной дробью, имеет вид

$$[x]_{пр} = \begin{cases} x, \text{ если } x \geq 0; \\ 1 - x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Пример 4.1. Запись числа $x=\pm 0{,}110011$ в прямом коде

$x= +0{,}110011 \rightarrow [x]_{пр}= 0{,}110011;$

$x= -0{,}11001 \rightarrow [x]_{пр}=1-(-0{,}110011) =1{,}110011.$

Нуль и единица слева от запятой в записи кодов чисел означает положительное (плюс) и отрицательное (минус) число *x* соответственно.

Обратный код для преобразования двоичного числа [x]<1 имеет вид

$$[x]_{обр} = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0 \\ (10 + x - 1 \cdot 10^{-m}), \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

где 10-основание двоичной системы счисления.

Пример 4.2. Записать число x=–0,101011 в обратном коде

$$[x]_{обр}=10 +(-0{,}101011)-0{,}000001 =1{,}010100.$$

Т. о., для перевода правильной отрицательной двоичной дроби в обратный код необходимо в знаковом разряде поставить единицу, а все цифры разрядов числа инвертировать, т. е. единицы заменить нулями, а нули единицами.

При выполнении операции сложения над числами, представленными в обратном коде, результат сложения будет получен в этих же кодах. Знаковые разряды чисел складываются так же, как и цифровые. В случае возникновения единицы переноса в знаковом разряде при сложении чисел в обратном коде эта единица передается по цепи циклического переноса и складывается с содержимым младшего цифрового разряда суммы.

Дополнительный код для преобразования отрицательного двоичного числа |x|<1 имеет вид:

$$[x]_{доп} = \begin{cases} x, \text{ если } x \ge 0, \\ 10 + x, \text{ если } x < 0 \end{cases}$$

Пример 4.3. Записать число *x*=–0,110011 в дополнительном коде

$$[x]_{доп}=10 +(-0{,}110011) =1{,}001101.$$

Т. о., для записи числа [x]<1 в дополнительном коде необходимо в знаковом разряде поставить единицу, все цифры разрядов числа инвертировать, а к младшему цифровому разряду прибавить единицу. Дополнительный код имеет одно значение нуля: $[+0]_{доп}=[-0]_{доп}=0$, а обратный код имеет два значения нуля: $[0]_{обр}$ = 0,00... 0 и $[0]_{обр}$= =$(10+0-1{,}10^{-m})$ =1,11 ... 1. Поэтому последний используется значительно реже.

При сложении чисел в дополнительном коде единица переноса из знакового разряда в случае ее возникновения не учитывается. Модифицированный обратный и дополнительный коды используются в ЭВМ для определения переполнения разрядной сетки.

Модифицированные коды отличаются от обычных обратных и дополнительных кодов тем, что имеют два знаковых разряда.

Например, для числа $x=-0,1010$ модифицированные коды будут иметь вид

$$[x]_{пр}^{м} = 11,1010; \quad [x]_{обр}^{м} = 11,0101; \quad [x]_{доп}^{м} = 11,0110.$$

При выполнении арифметических действий над двоичными числами в АЛУ происходит сравнение значений двух знаковых разрядов модифицированных кодов чисел. В случае совпадения их содержимого оно выдает сигнал на продолжение выполнения операций, в случае несовпадения - в ЭВМ вырабатывается сигнал либо на прекращение процесса вычислений вообще, т. е. останов машины, либо на устранение переполнения разрядной сетки машины.

4.1. Арифметические операции над двоичными числами с фиксированной запятой

Сложение чисел. Сложение чисел с фиксированной запятой осуществляется в одном из машинных кодов -обратном или дополнительном. Причем, операции в этих кодах выполняются обычно над двоичными, числами, являющимися правильными дробями. Последовательность выполнения операции сложения следующая:

- исходные числа записываются в принятом для данной машины коде;

- производится поразрядное сложение кодов чисел, включая и знаковые разряды;

- единица переноса добавляется к младшему разряду суммы, если операция выполнялась над числами в обратном коде, или не учитывается (отбрасывается) в дополнительном коде;

- производится анализ на переполнение разрядной сетки. В случае переполнения вырабатывается сигнал на прерывание программы.

Переполнение разрядной сетки устраняется путем изменения масштабных коэффициентов.

Операция вычитания в ЭВМ заменяется операцией сложения в модифицированном обратном или дополнительном коде.

Рассмотрим сложение положительных и отрицательных чисел.

Пример 4.4. Сложить числа $x=0,101001$ и $y=0,011011$ в модифицированном коде.

Решение

$$\begin{array}{r} 00{,}101001 \\ +\,00{,}011011 \\ \hline 01{,}000100 \end{array}$$

Сочетание 01 в знаковых разрядах свидетельствует о переполнении. Полученная сумма есть число, по модулю превышающее единицу.

Пример 4.5. Сложить числа x=0,101111 и y=1,110010 в модифицированных обратном и дополнительном кодах. Результат сложения представить в прямом коде.

$$\begin{array}{r} [x]^{M}_{обр} = 00{,}101111 \\ +\,[y]^{M}_{обр} = 11{,}001101 \\ \hline [x+y]^{M}_{обр} = 11{,}111100 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r} [x]^{M}_{доп} = 00{,}101111 \\ +\,[y]^{M}_{доп} = 11{,}001110 \\ \hline [x+y]^{M}_{доп} = 11{,}111101 \end{array}$$

$$[x+y]^{M}_{обр} \to [x+y]^{M}_{доп} \to [x+y]_{пр} = 1{,}000011$$

Пример 4.5. Сложить числа x=1,1010 и y=1,1101

$$\begin{array}{r} [x]^{M}_{обр} = 11{,}0101 \\ +\,[y]^{M}_{обр} = 11{,}0010 \\ \hline [x+y]^{M}_{обр} = 110{,}0111 \\ \to 1 \\ \hline 10{,}1000 \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{r} [x]^{M}_{доп} = 11{,}0110 \\ +\,[y]^{M}_{доп} = 11{,}0011 \\ \hline [x+y]^{M}_{доп} = 110{,}0111 \end{array}$$

Различные значения цифр (10) в знаковых разрядах сумм. модифицированных обратного и дополнительного кодов означают переполнение разрядной сетки машины.

Пример 4.7. Выполнить вычитание чисел, используя дополнительный и обратный коды, уменьшаемое число x=0,101011, а вычитаемое число y=0,001111.

Решение. Изменяем знак *y* на обратный, получим –*y*=–0,001111. Образуем дополнительный и обратный коды:

$$[y]_{дов} = 11{,}110001 \text{ и } [y]_{обр} = 11{,}11000.$$

Затем выполняем операцию сложения (x + $[y]^{М}_{доп}$) и (x + +$[y]^{М}_{обр}$).

В дополнительном коде: $[x]^{М}_{доп} = 0{,}101011$ $[y]^{М}_{доп} = 1{,}110001$

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 00{,}101011 \\ 11{,}110001 \end{array} \\ \hline 100{,}011100 \end{array}$$

Получаем результат в дополнительном коде 00,011100, что соответствует положительному числу +0,011100.

В обратном коде

$[x]^{М}_{доп} = 0{,}101011$

$[y]^{М}_{доп} = 1{,}110001$

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 00{,}101011 \\ 11{,}110000 \end{array} \\ \hline 1 \\ \hline 00{,}011100 \end{array}$$ циклический перенос

Производя циклический перенос, получим результат в обратном коде 00,011100, что соответствует положительному числу +0,011100.

Умножение чисел. Умножение осуществляется в прямом коде. Процесс умножения состоит из операций сложения со сдвигами множимого или сумм частных произведений. Умножение может производиться начиная с младшего или старшего разряда множителя. В первом случае сдвиг частных произведений производится влево, а во втором – вправо. Частные произведения могут быть равны нулю, если в разряде множителя стоит нуль, или множимому, если в разряде множителя стоит единица. Знак произведения получается в результате сложения знаков сомножителей. При одинаковых знаках сомножителей знак произведения положительный, при разных знаках - отрицательный (0+0=0, 1+1=0, 1+0=1, 0+1=1).

Разрядность произведения определяется суммой разрядов сомножителей (n+n=2n). При округлении произведения младшие разряды отбрасываются, а старшие - округляются.

Пример 4.8. Найти произведение двух чисел x=0,1101 и y=1,1011.

а) определяем знак произведения 0+1=1;

б) производим умножение абсолютных значений сомножителей:

со сдвигом влево со сдвигом вправо

$$\begin{array}{r} 0{,}1101 \\ \times\, 0{,}1011 \\ \hline 1101 \\ +\ \ 1101 \\ 1101 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0{,}1101 \\ \times\, 0{,}1011 \\ \hline 1101 \\ +\ \ 1101 \\ 1101 \end{array}$$

Искомое произведение будет 1,10001111.

Деление чисел. Деление производится путем последовательного вычитания делителя из делимого или из образовавшихся остатков со сдвигом их на один разряд влево. Знак частного, как и при умножении, получается в результате сложения по модулю 2 знаков делимого и делителя.

В ЭВМ используются два метода деления: деление с восстановлением остатка и деление без восстановления остатка.

Деление с восстановлением остатка состоит в том, что если при вычитании делителя из делимого или очередного остатка получается положительный остаток (больше или равен делителю), то в разряд частного записывается 1, и полученный остаток сдвигается на один разряд влево. Если же остаток получится отрицательным (меньше делителя), то в разряд частного записывается нуль, а к остатку добавляется делитель для восстановления предыдущего остатка, и результат сдвигается на один разряд влево.

При делении без восстановления остатка полученный в результате вычитания остаток, независимо от его знака, сдвигается на один разряд влево. Из сдвинутого остатка, если он положительный, вычитается делитель и в разряд частного записывается 1, а если он отрицательный, то к нему прибавляется делитель и в разряд частного записывается нуль.

Для определения каждой цифры частного при делении без восстановления остатка необходимо выполнить 2 такта (сложение или вычитание и сдвиг).

Для выполнения деления без восстановления остатка чисел, заданных в дополнительном коде, при произвольном сочетании знаков делимого и делителя выполняются (n +l) тактов для получения 1 разряда знака частного и n разрядов мантиссы частного; первый такт отличается от последующих N тактов: он состоит только из одной операции-вычитания (или сложения) делителя и делимого (без предварительного сдвига делимого); все последующие N тактов одинаковы и состоят из двух операций: а) сдвига частичного остатка, полученного в предыдущем такте, на 1 .разряд влево, и б) вычитания (или сложения) делителя и полученного сдвинутого частичного остатка.

При этом:

1) в случае совпадения знаков делителя и очередного остатка (в первом такте - делимого) - сочетания знаков 00 'и 11 - код регистра делителя преобразуется в дополнительный и передается на сумматор;

в младший разряд частного записывается первая очередная цифра частного. В следующем такте частное и частичный остаток сдвигаются на один разряд влево;

2) в случае несовпадения знаков делителя и очередного остатка (в первом такте - делимого) - сочетания знаков 01 и 10-код с регистра делителя передается на сумматор без преобразования; в младший разряд частного записывается нуль. В следующем такте частное и частичный остаток сдвигаются на один разряд влево.

Пример 4.9. Выполнить в дополнительном коде деление без восстановления остатка двух чисел x=0,10011 и y=0,11001.

Решение для деления без восстановления остатка: делимое x=0,10011, делитель y=0,11001, $[-y]_{доп}$= 1,00111.

Сумматор (см)	Регистр частного	Примечание
00 10011	00000	начальное положение: на СМ – делимое x частное равно 0
01 00110 + 11 00111 00 01101	00001	сдвиг содержимого СМ влево $[-y]_{доп}$ на СМ сочетание знаков СМ и у – 00 частное равно 1
00 11010 + 11 00111 00 00001	00011	сдвиг содержимого СМ влево $[-y]_{доп}$ на СМ сочетание знаков СМ и у – 00 частное равно 1
00 00010 + 11 00111 00 01001	00110	сдвиг содержимого СМ влево $[y]_{доп}$ на СМ сочетание знаков СМ и у – 10 частное равно 0
10 10010 + 00 11001 11 01011	01100	сдвиг содержимого СМ влево $[y]_{пр}$ на СМ сочетание знаков СМ и у – 10 частное равно 0
10 10110 + 00 11001 11 01111	11000	сдвиг содержимого СМ влево $[y]_{пр}$ на СМ сочетание знаков СМ и у – 10 частное равно 0 и т. д.

Деление продолжается до тех пор пока не будет получена требуемая точность частного.

Ответ: частное 0,11000, остаток 2^{-3} ⁄0,10001.

Примеры для упражнений

1. Выполнить сложение в модифицированном коде:

а) 0,101001+0,011011 г) 0,100001+0,011111,

б) 0,101011+0,010011 д) 0,101010+0,000111,

в) 0,110011+0,001111 е) 0,101110+0,010111,

ж) 0,100100+0,111011.

2. Выполнить сложение, используя в каждом случае дополнительный и обратный модифицированные коды:

а) 0,110001+(–0,001011); г) (–0,100111)+0,001001;

б) (–0,010111)+(–0,000001); д) (–0,101010)+(–0,011011);

в) (–0,001010)+(–0,011011); е) (–0,011101)+(0,001010);

ж) (–0,100101)+ (0,010111).

3. Выполнить вычитание, используя в каждом случае дополнительный и обратный модифицированные коды:

а) 0,101011–0,001111, г) (–0,101111) –0,101011,

б) 0,111011–0,101110, д) 0,100110–0,011000.

в) 0,111011–0,110101, е) 0,101110–0,010111,

ж) 0,100001–0,001110.

4. Выполнить умножение двух чисел x и y в прямом коде:

а) x=0,1101
y=0.0101;

д) x= 1,1011;
y=0,1101;

б) x =0,1110
y=1,0011

е) x=1,0010;
y=1,1111;

в) x=0,1000
y=1.1010;

ж) x=0,0110;
y=1,1001.

г) x=1,0111
y=1,1011;

5. Выполнить деление двух чисел x и y без восстановления остатка. Вычисления производить до получения 6 двоичных разрядов:

а) x=0,10011;
y=0,11001;
б) x=0,001011;
y=0,111011;
в) x=0,100011;
y=0,101001;
г) x=0,011111
y=0,101111;
д) x=0,010000;
y=0,101100;
е) x=0,001011
y=.0,111111;
ж) x=0,011001;
y=0,111111.

4.2. Арифметические операция над двоичными числами с плавающей запятой

Сложение и вычитание. Арифметические операции над числами с плавающей запятой выполняются как над мантиссами, так и над порядками.

При выполнении арифметических операций над числами с плавающей запятой заключительным этапом является проверка нормализованности результата. Если произошло нарушение нормализации, например, при сложении - нарушение нормализации влево (переполнение): при умножении - нарушение нормализации вправо, то результат необходимо, нормализовать; при нормализации изменяется порядок числа. При выполнении операций сложения или вычитания чисел с плавающей запятой необходимо соблюдать следующую последовательность действий:

1) выравнивание порядков (складывать или вычитать можно лишь числа, имеющие одинаковый порядок; для этого мантиссу числа, имеющего меньший порядок, сдвигают вправо на число разрядов, равное разности порядков; общим становится больший порядок; в числах с меньшим порядком происходит нарушение нормализации);

2) непосредственное сложение или вычитание (по правилам действий над числами с фиксированной запятой);

3) проверка нормализованности результата (если получилось ненормализованное число, производится нормализация).

Умножение и деление. При умножении чисел с плавающей запятой мантиссы перемножаются по тем же правилам, что и числа с фиксированной запятой. Порядок произведения определяется как алгебраическая сумма порядков сомножителей.

При образовании ненормализованного произведения (мантисса произведения меньше 0,1) его нормализация производится описанным выше способом, т. е. путем сдвига влево до появления значащей цифры в старшем разряде. При этой - общий порядок произведения уменьшается на число произведенных сдвигов.

При делении чисел знак частного определяется аналогично умножению, а порядок частного - как разность порядков делимого и делителя. Деление мантисс выполняется аналогично делению чисел с фиксированной запятой. Если мантисса частного образуется с переполнением (больше 1), то производится ее нормализация путем сдвига на один разряд вправо и увеличение порядка на единицу.

5. ВАРИАНТЫ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

Для своего варианта данных из табл. 3 выполнить следующие действия:

1) Числа из второго и третьего столбцов табл. 3 перевести из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную, шестнадцатеричную и двоично-десятичную системы счисления. Проверить правильность полученных результатов.

2) Десятичные числа из четвертого и пятого столбца в табл. 3 представить в двоичном коде и выполнить над ними операции сложения, вычитания, умножения и деления. Проверить правильность полученных результатов.

3) Полученные результаты арифметических действий в двоичных кодах записать в восьмеричной и шестнадцатеричной системах счисления. Проверить правильность полученных результатов.

Примечание: Перевод в двоичную систему счисления и выполнение операции деления в двоичных кодах проводите, с точностью до пяти двоичных разрядов после запятой.

Таблица 3

Варианты значений десятичных чисел для перевода в другие системы счисления и выполнения арифметических действий в двоичном коде

Вариант	Числа в десятичной системе счисления			
	для перевода		для арифметических действий	
1	65,28	1258	67	41
2	73.9	1931	75	39
3	82,625	2013	71	50
4	68,25	1240	68	42
5	92,3	1824	77	40
6	74,3125	2020	72	51
7	82,6	1351	69	43
8	69,125	1443	78	41
9	81,5625	1735	73	39
10	121,1	2015	70	44
11	99,27	1565	79	42
12	61,3	1191	74	40
13	109.25	1218	71	45
14	72.1	2018	80	43
15	98.9	1322	75	41
16	83,2	1979	72	39
17	77,8	2034	81	44
18	94,3	1463	76	42
19	86,7	1840	73	40
20	105,4	2025	68	45
21	65,6	1554	77	52
22	16,51	1741	74	41
23	74,3	1665	77	45
24	107,6	2035	78	43
25	83,5	1572	75	42
26	68,7	1726	69	47
27	92,4	1486	79	44
28	79,8	1813	76	58
29	101,125	2097	70	55
30	80,9	1907	80	49

6. ЭЛЕМЕНТЫ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

1. При каких условиях правильная десятичная дробь может иметь точный двоичный эквивалент?

2. Имеет ли правильная двоичная дробь точный десятичный эквивалент и при каких условиях?.

3. Каковы признаки переполнения для положительных и отрицательных чисел, записанных в модифицированных кодах?

4. Исходя из того, что объем оборудования для представления чисел в зависимости от основания системы счисления можно характеризовать произведением числа разрядов *n* на основании используемой системы счисления *p*, т. е. величиной цифроразрядов *p-n*, показать, какая система счисления окажется наиболее экономичной, если при выбираемых *p* и n требуется оперировать с *n* разрядными числами.

5. Перевод дробей в общем случае представляет бесконечный процесс, и поэтому он может быть осуществлен лишь приближенно. Число цифр в представлении q-ичного числа определяется из условия, что точность числа в q-ичной системе счисления должна соответствовать точности числа в исходной s-ичной системе счисления. Такое условие может быть записано в виде равенства

$$p^{-n_s} = q^{-n_q}$$

где n_p и n_q -количество цифр в изображении s-ичного и q-ичного числа.

Для уменьшения погрешности перевода в получаемом q-ичном изображении числа проводят округление по последнему разряду, используя правила, применяемые в десятичной системе счисления. В соответствие с изложенным определите необходимое число двоичных разрядов при переводе числа 0,31 десятичной системы счисления в двоичную систему счисления.

Литература

1. В. З. Аладьев, Ю. Я. Хунт, М. Л. Шишаков. Основы информатики. Учебное пособие. Издание 2-е переработанное и дополненное. – М.: «Филинъ»,1999. –544 с.

2. А.П. Алексеев. Информатика 2001. –М.: «СОЛОН-Р»,2001. –368 с.

3. В.А. Острейковский. Информатика: Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа.,2000. –511 с.

4. А.П. Пятибратов и др. Вычислительные системы, сети и телекоммуникации: Учебник. – М.: Финансы и статистика, 1998. –400 с.